第 18 講　積分と漸化式

18

［A］　次の定積分を計算せよ．ただし，α と β は $\alpha<\beta$ を満たす定数，m と n は自然数とする．

$$I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}dx$$

［B］　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$S_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}x^{n}\sin x\,dx$$

$$C_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}x^{n}\cos x\,dx$$

とおく．ただし，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　S_0，C_0 の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$n\geqq 1$ のとき，S_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いて，また，C_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いてそれぞれ表せ．

(3)　$f(x)=\int_{0}^{x}t(\sin t-\cos t)dt+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{t}f(t)dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 18 講　積分と漸化式

18　次の問いに答えよ．

(1)　p，q を 0 または正の整数とし

$$I_{p,\,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

とおく．

(a)　$I_{p,\,0}$ の値を求めよ．

(b)　$q \geqq 1$ のとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}$$

(c)　次の等式を証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

(2)　n を正の整数とすると

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{p!(n-p)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+2}\{1+(-1)^n\}$$

が成り立つことを証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　積分と漸化式

18

［A］ 次の定積分を計算せよ．ただし，α と β は $\alpha<\beta$ を満たす定数，m と n は自然数とする．

$$I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$

［B］ $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n \sin x\,dx$$

$$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n \cos x\,dx$$

とおく．ただし，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) S_0，C_0 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $n\geqq 1$ のとき，S_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いて，また，C_n を S_{n-1}，C_{n-1} を用いてそれぞれ表せ．

(3) $f(x)=\displaystyle\int_0^x t(\sin t-\cos t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t f(t)dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

【答】 ［A］ $\dfrac{(-1)^n m!n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$

［B］ (1) $S_0=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$，$C_0=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$

(2) $\begin{cases} S_n=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n-\dfrac{n}{2}(S_{n-1}-C_{n-1}) \\ C_n=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n-\dfrac{n}{2}(S_{n-1}+C_{n-1}) \end{cases}$

(3) $f(x)=\sin x-x\sin x-\cos x-x\cos x+\dfrac{(\pi-1)e^{\frac{\pi}{2}}-5}{2\left(e^{\frac{\pi}{2}}-2\right)}$

【解説】

［A］

$$I(m,\ n)=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(x-\beta)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$

となる．以下同様に

$$I(m,\ n)=-\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$

$$=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)I(m+2,\ n-2)$$

$$=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)I(m+3,\ n-3)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2}{m+n-1}\right)I(m+n-1,\ 1)$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となる．ここで

$$I(m+n-1,\ 1)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n-1}(x-\beta)dx$$
$$=\left[\frac{1}{m+n}(x-\alpha)^{m+n}(x-\beta)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+n}(x-\alpha)^{m+n}dx$$
$$=-\left[\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=-\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n)(m+n+1)}$$

となるので

$$I(m,\ n)=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2}{m+n-1}\right)\left\{-\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n)(m+n+1)}\right\}$$
$$=\frac{(-1)^{n}n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots(m+n)(m+n+1)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{(-1)^{n}m!n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}}$$

［B］（1）

$$S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$$
$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)}$$

$$C_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$$
$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}$$

（2）

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n\sin x\,dx$$
$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)x^n\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^{n-1}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-\frac{n}{2}(S_{n-1}-C_{n-1})}$$

$$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^n\cos x\,dx$$
$$=\left[\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)x^n\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x x^{n-1}(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n-\frac{n}{2}(S_{n-1}+C_{n-1})}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(2)より

$$S_1=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1-\frac{1}{2}(S_0-C_0)=\frac{1}{4}(e^{\frac{\pi}{2}}\pi-2)$$

$$C_1=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^1-\frac{1}{2}(S_0+C_0)=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2)$$

である.

$$\begin{aligned}&\int_0^x t(\sin t-\cos t)dt\\&=\Big[-t(\sin t+\cos t)+\sin t-\cos t\Big]_0^x\\&=-x(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)+1\end{aligned}$$

$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t f(t)dt$ とおくと

$$f(x)=-x(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)+1+k$$

よって

$$\begin{aligned}k&=-S_1-C_1+S_0-C_0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+k)e^t dt\\&=\frac{1}{2}(-e^{\frac{\pi}{2}}\pi+e^{\frac{\pi}{2}}+3)+(1+k)(e^{\frac{\pi}{2}}-1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad k=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\pi-3e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2(e^{\frac{\pi}{2}}-2)}$$

ゆえに

$$f(x)=\boldsymbol{-x(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)+\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\pi-e^{\frac{\pi}{2}}-5}{2(e^{\frac{\pi}{2}}-2)}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 18 講　積分と漸化式

18　次の問いに答えよ．

(1)　p，q を 0 または正の整数とし

$$I_{p,\,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

とおく．

(a)　$I_{p,\,0}$ の値を求めよ．

(b)　$q\geqq 1$ のとき，次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}$$

(c)　次の等式を証明せよ．

$$I_{p,\,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

(2)　n を正の整数とすると

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{p!(n-p)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+2}\{1+(-1)^n\}$$

が成り立つことを証明せよ．

【答】　(1)　(a) $I_{p,\,0}=\dfrac{1}{p+1}$　(b) 略　(c) 略　(2) 略

【解説】

(1)　(a)

$$I_{p,\,0}=\int_0^1 t^p dt$$

$$=\left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{p+1}}$$

(b)

$$I_{p,\,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

$$=\left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{p+1}t^{p+1}\cdot q(1-t)^{q-1}\cdot(-1)dt$$

$$=\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt$$

$$=\frac{q}{p+1}I_{p+1,\,q-1}$$

(c)　(b)より

$$I_{p,\,q}=\frac{q}{p+1}\cdot\frac{q-1}{p+2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p+q}I_{p+q,\,0}$$

$$=\frac{q!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}\cdot\frac{1}{p+q+1}\quad\text{((a)より)}$$

$$=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p I_{p,\ n-p} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\int_0^1 (-t)^p(1-t)^{n-p}dt \\
&= \sum_{p=0}^{n}\int_0^1 \{(-t)^p(1-t)^{n+1-p}-(-t)^{p+1}(1-t)^{n-p}\}dt \\
&= \int_0^1 \{(1-t)^{n+1}-(-t)^{n+1}\}dt \\
&= \left[\frac{-1}{n+2}(1-t)^{n+2}+\frac{1}{n+2}(-t)^{n+2}\right]_0^1 \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+2}\{1+(-1)^n\} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。